PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG 4. 07. 2017

TESTE ÉPOCA DE RECURSO

Nome:____**Número:**_________

Cotação: (Espaço reservado para classificações)

1.(15)	**3a.(10)**	**4a.(15)**	**5.a(10)**	**6a.(15)**	**7.(15)**
2.(15)	**3b.(10)**	**4b.(10)**	**5.b(15)**	**6b.(15)**	
	3c.(15)	**4c.(10)**		**6c.(15)**	
		4d.(15)			

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. **[15]** Em determinada ilha, 60% da população vive em zonas rurais e 40% em zonas urbanas. Apurou-se, também, que 15% da população que vive em zonas rurais fala inglês enquanto esta percentagem é de 35% para os que vivem em zona urbana. Sabendo que uma pessoa escolhida ao acaso fala inglês, qual a probabilidade de viver em zona rural?

Sejam os acontecimentos: I a pessoa fala inglês e R a pessoa vive numa zona rural

$$P(R\mid I)=\frac{P(I\mid R)\times P(R)}{P(I\mid R)\times P(R)+P(I\mid \bar{R})\times P(\bar{R})}=\frac{0.15\times 0.6}{0.15\times 0.6+0.35\times 0.4}=\frac{0.09}{0.09+0.14}=0.3913$$

2. **[15]** Seja (X,Y) uma v.a. bidimensional com função distribuição conjunta $F(x,y)$ e funções distribuição marginais $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ respectivamente. Prove que $F_X(x)+F_Y(y)-1\le F(x,y)\le\sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$

Analisemos cada desigualdade separadamente:

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)-P(Y>y)+P\left(X>x,Y\le y\right)$$
$$=F_X(x)+\left(1-F_Y(y)\right)+\underbrace{P\left(X>x,Y\le y\right)}_{\ge 0}$$
$$\ge F_X(x)+1-F_Y(y)$$

$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x\mid Y\le y)P(Y\le y)$ e de forma semelhante

$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=P(Y\le y\mid X\le x)P(X\le x)$ logo

$$\left(F(x,y)\right)^2=F_X(x)F_Y(y)\underbrace{P(Y\le y\mid X\le x)P(X\le x\mid Y\le y)}_{\text{valor entre 0 e 1}}$$
$$\le F_X(x)F_Y(y)$$

Logo $F(x,y)\le\sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$

Resumindo os 2 casos vem $F_X(x)+F_Y(y)-1\le F(x,y)\le\sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$

3. Assuma que num exame um estudante responde sequencialmente e de forma aleatória (respostas independentes de pergunta para pergunta) a um conjunto de perguntas de escolha múltipla, cada uma com 5 alternativas das quais uma é correcta e as restantes erradas.

a. **[10]** Qual a probabilidade de, em 10 perguntas, se observarem mais de 5 respostas certas?

X número de respostas certas em 10 perguntas, $X\sim b(10,0.2)$

$P(X>5)=1-P(X\le 5)=1-0.9936=0.0064$

b. **[10]** Qual a probabilidade da primeira resposta certa aparecer na quarta pergunta?

Y número da pergunta em que aparece a 1ª resposta certa, $Y \sim Geo(0.2)$

$P(Y=4) = 0.8^3 \times 0.2 = 0.1024$

c. **[15]** Qual a probabilidade da terceira resposta certa aparecer na décima pergunta? E qual o número esperado de respostas até aparecer a terceira resposta certa?

Z número da pergunta em que aparece a 3ª resposta certa, $Z \sim BN(3, 0.2)$

$$P(Z=10) = \binom{9}{2} 0.2^2\, 0.8^7 \times 0.2 = 36 \times 0.2^3 \times 0.8^7 = 0.0604$$

4. Seja X uma v.a. com função densidade dada por $f_X(x) = 7x^6$, $0 < x < 1$.

a. **[15]** Obtenha a função de distribuição de X e calcule $P(X > 0.6)$ e $P(X < 0.6 \mid X < 0.7)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 7u^6\, du & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^7 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$P(X > 0.6) = 1 - \mathrm{P(X \le 0.6)} = 1 - 0.6^7 = 0.9720$$

$$P(X < 0.6 \mid X < 0.7) = \frac{P(X < 0.6)}{P(X < 0.7)} = \frac{0.6^7}{0.7^7} = 0.3399$$

b. **[10]** Obtenha a média e a variância de X.

$$E(X) = \int_0^1 x 7x^6\, dx = 7\left(\frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{7}{8} = 0.875$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 7x^6\, dx = 7\left(\frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{7}{9} = 0.7778 \quad \mathrm{var}(X) = E(X^2) - \left(E(\mathrm{X})\right)^2 = \frac{7}{9} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 0.01215$$

c. **[10]** Obtenha a função densidade de $W = 2X^2 - 1$

$$W = 2X^2 - 1 \Leftrightarrow X^2 = \frac{W+1}{2} \Leftrightarrow X = \left(\frac{W+1}{2}\right)^{1/2}$$

Sol 1 -

$$\frac{dx}{dw} = \frac{1}{2}\left(\frac{w+1}{2}\right)^{-1/2} \frac{1}{2} = \frac{2^{1/2}}{4(w+1)^{1/2}}$$

$$f_W(\mathrm{w}) = 7\left(\left(\frac{w+1}{2}\right)^{1/2}\right)^6 \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{w+1}} = \frac{7\sqrt{2}}{32}(w+1)^{5/2},\ 0 < \left(\frac{w+1}{2}\right)^{1/2} < 1 \Leftrightarrow -1 < w < 1$$

Sol 2 - $F_W(w) = \left(\left(\frac{w+1}{2}\right)^{1/2}\right)^7 = \frac{(w+1)^{7/2}}{2^{7/2}}$, $-1 \le w < 1$

$$f_W(w) = \frac{7}{2}\frac{(w+1)^{5/2}}{2^{7/2}} = \frac{7}{16\sqrt{2}}\left(w+1\right)^{5/2},\ -1 < w < 1$$

d. **[15]** Sabendo que a distribuição da v.a. Y condicionada por $X = x$ é dada por $f_{Y|X=x}(y) = 4\frac{y^3}{x^4}$, $0 < y < x$ e $0 < x < 1$ com x fixo obtenha a função densidade conjunta e calcule $P(X < 0.5, Y < 0.5)$.

$$f(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \times f_X(x) = 4\frac{y^3}{x^4} \times 7x^6 = 28x^2\, y^3 \,,\; 0 < y < x < 1$$

$$P(X < 0.5, Y < 0.5) = \int_0^{0.5}\int_0^{x} 28x^2\, y^3\, dy\, dx = \int_0^{0.5} 28x^2 \left(\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^x \right) dx = \int_0^{0.5} 7\, x^6 dx = \left(\left[x^7\right]_0^{0.5} = \frac{1}{128} = 0.0078\right.$$

ou

$= P(X < 0.5)$ já que a função densidade está definida para $y < x$ e portanto $X < 0.5 \rightarrow Y < 0.5$

5. Numa fábrica são produzidos parafusos de determinado tipo cujo peso, em gramas, pode considerar-se uma variável aleatória, X , com distribuição normal de média 10 e desvio padrão 2.

a. **[10]** Seleccionado, de forma aleatória e independente, um conjunto de 16 parafusos, qual a probabilidade do peso médio do conjunto diferir do peso médio na população por mais de 1.1 gramas?

X peso em gramas de um parafuso $\qquad X \sim n(10, \sigma = 2)$

Seja $\bar{X}$ a média dos pesos dos parafusos no conjunto, $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{16}$ com $\sum_{i=1}^{16} X_i \sim n(160, \sigma_{\sum X_i} = 8)$

$$P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > 1.1\right) = 1 - P\left(-1.1 < \bar{X} - \mu < 1.1\right) = 1 - P\left(-1.1 < \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{16} - \mu < 1.1\right)$$

$$= 1 - P\left(-1.1 < \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i - 16\mu}{16} < 1.1\right) = 1 - P\left(-2.2 < \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i - 160}{8} < 2.2\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi(2.2) - \Phi(-2.2)\right) = 2\left(1 - \Phi(2.2)\right) = 2 \times (1 - 0.9861) = 0.0278$$

b. **[15]** Estes parafusos são comercializados em embalagens contendo 12 unidades. O peso da embalagem vazia, em gramas, é uma variável aleatória com uma distribuição normal de média 60 e desvio padrão 5. Qual a probabilidade de uma embalagem pronta para ser vendida pesar menos de 190 gramas?

Y peso (gramas) de 12 parafusos $\qquad Y = \sum_{i=1}^{12} X_i \sim n(120, \sigma = \sqrt{48})$

V peso da caixa vazia $\qquad V \sim n(60, \sigma = 5)$

W peso da caixa cheia $\qquad W = V + Y \sim n(180, \sigma = \sqrt{73})$

$$P(W < 190) = P\left(\frac{W - 180}{\sqrt{73}} < \frac{10}{\sqrt{73}}\right) = \Phi(1.17) = 0.8790$$

6. Seja X uma v.a. com distribuição de Poisson de parâmetro λ e Y uma v.a. independente de X com distribuição binomial de parâmetros $n = 3$ e $\theta = 0.5$.

a. **[15]** Admitindo que $\lambda = 1.5$ calcule $P(X = 2)$, $P(X = 3 \mid X \le 4)$ e $P(X = Y)$.

$X \sim Po(\lambda) \qquad X \sim b(3; 0.5)$

$$P(X = 2) = 0.2510 \,;\; P(X = 3 \mid X \le 4) = \frac{P(X = 3)}{P(X \le 4)} = \frac{0.1255}{0.9814} = 0.1279$$

$$P(X = Y) = \sum_{y=0}^{3} P(X = Y \mid Y = y) \times P(Y = y) = \sum_{y=0}^{3} \frac{P(X = y, Y = y)}{P(Y = y)} \times P(Y = y)$$

$$= \sum_{y=0}^{3} P(X = y) \times P(Y = y)$$

$$= 0.2231 \times 0.125 + 0.3347 \times 0.375 + 0.2510 \times 0.375 + 0.1255 \times 0.125 = 0.2632$$

b. **[15]** Se $P(X=1)=P(X=2)=p$, qual o valor de p ?

$$P(X=1)=\frac{\lambda^1 \times e^{-\lambda}}{1!}=\lambda e^{-\lambda};\ P(X=2)=\frac{\lambda^2 \times e^{-\lambda}}{2!}=\frac{\lambda^2\, e^{-\lambda}}{2}\ \text{logo}$$

$$\lambda \times e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2\, e^{-\lambda}}{2} \Leftrightarrow 2\lambda=\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=2\ \text{ já que } \lambda>0$$

$$p=\lambda e^{-\lambda}=2e^{-2}=0.2707$$

c. **[15]** Calcule $E\left(|X-1|\right)$ e particularize a solução para $\lambda=1$.

$$E\left(|X-1|\right)=\sum_{x=0}^{\infty}|x-1|\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=e^{-\lambda}+\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=e^{-\lambda}+\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}_{E(X)}-\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}_{1-e^{-\lambda}}$$

$$=e^{-\lambda}+\lambda-\left(1-e^{-\lambda}\right)=\lambda+2e^{-\lambda}-1$$

Quando $\lambda=1$, $E\left(|X-1|\right)=1+2e^{-1}-1=2/e=0.735759$

7. **[15]** No formulário apresenta-se a seguinte propriedade da distribuição exponencial:
$X_i \sim \text{Ex}(\lambda)$ (i = 1, 2, ..., k) independentes $\Rightarrow$ $\min_i X_i \sim \text{Ex}(k\lambda)$. Demonstre esta propriedade.

Seja $Y=\min_i X_i$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\min_i X_i \le y\right)=1-P\left(\min_i X_i > y\right)=1-P(X_1>y, X_2>y,\ldots,X_k>y)$$

$$=1-\left(P(X>y)\right)^k \qquad \text{porque } X_i, X_j \text{ independentes para } i\neq j$$

$$=1-(e^{-\lambda y})^k=1-e^{-\lambda k y}$$

que é a função de distribuição de uma exponencial com parâmetro λk